

相対性理論

ここでは、相対性理論のビアンキ恒等式(9.38)と縮約したビアンキ恒等式(9.40)の導出を説明します。その説明の前に、杉山先生の教科書の第9章を読んでおいてください。

§9.4, §9.5

まず、準備をします。

(準備)

リーマン曲率テンソルの式を表すと、偏微分と接続を用いて

$$R_{\nu\lambda\kappa}^{\mu} = \partial_{\lambda}\Gamma_{\nu\kappa}^{\mu} - \partial_{\kappa}\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\eta\lambda}^{\mu}\Gamma_{\nu\kappa}^{\eta} - \Gamma_{\eta\kappa}^{\mu}\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \quad (9.26)$$

となる。

またこれより、リーマン曲率テンソルの対称性を表す式として

$$R_{\nu\lambda\kappa}^{\mu} = -R_{\nu\kappa\lambda}^{\mu} \quad (9.34)$$

も得られる。

そして、上の足をメトリックによって下げることで定義される共変なリーマン曲率テンソルが

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\lambda\kappa} &= g_{\mu\tau} R_{\nu\lambda\kappa}^{\tau} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\kappa} + \partial_{\mu}\partial_{\kappa}g_{\nu\lambda} - \partial_{\mu}\partial_{\lambda}g_{\nu\kappa} - \partial_{\nu}\partial_{\kappa}g_{\mu\lambda}) + g_{\eta\tau} (\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\lambda}^{\tau} - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\kappa}^{\tau}) \quad (9.36) \end{aligned}$$

と表される。

またこれより

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\nu\mu\lambda\kappa}, \quad R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (9.37)$$

であることがわかる。

式(9.36)と式(9.37)の導出は、章末問題 9.2 の解答を参照してください。

以上を最初の準備とし、1つ目の本題に入ります。

(問) ビアンキ恒等式、つまり次の共変微分の関係式

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\kappa\eta} + \nabla_\eta R_{\mu\nu\lambda\kappa} + \nabla_\kappa R_{\mu\nu\eta\lambda} = 0 \quad (9.38)$$

を示せ。P127(9.38)

(解) まず、ある点において局所慣性系座標を考えて、その点における偏微分についての式

$$\partial_\lambda R_{\mu\nu\kappa\eta} + \partial_\eta R_{\mu\nu\lambda\kappa} + \partial_\kappa R_{\mu\nu\eta\lambda} = 0$$

を示す。

局所慣性系座標であることと、式(9.36)を用いて

$$\begin{aligned} & \partial_\lambda R_{\mu\nu\kappa\eta} + \partial_\eta R_{\mu\nu\lambda\kappa} + \partial_\kappa R_{\mu\nu\eta\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial_\lambda (\partial_\nu \partial_\kappa g_{\mu\eta} + \partial_\mu \partial_\eta g_{\nu\kappa} - \partial_\mu \partial_\kappa g_{\nu\eta} - \partial_\nu \partial_\eta g_{\mu\kappa}) \\ & \quad + \partial_\eta (\partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\kappa} + \partial_\mu \partial_\kappa g_{\nu\lambda} - \partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\kappa} - \partial_\nu \partial_\kappa g_{\mu\lambda}) \\ & \quad + \partial_\kappa (\partial_\nu \partial_\eta g_{\mu\lambda} + \partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\eta} - \partial_\mu \partial_\eta g_{\nu\lambda} - \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\eta}) \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

いま考えている座標系では、この点において接続は 0 だから、この式は

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\kappa\eta} + \nabla_\eta R_{\mu\nu\lambda\kappa} + \nabla_\kappa R_{\mu\nu\eta\lambda} = 0 \quad (9.38)$$

と同等である。ところが、この式はテンソルの式なので、任意の系で成り立つ。よって、示せた。 終

次の準備をします。

(準備)

リーマン曲率テンソルの縮約を取ることで、
リッチテンソル

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\kappa}_{\mu\kappa\nu} = g^{\kappa\eta} R_{\eta\mu\kappa\nu} \quad (9.39)$$

を得る。

また、リッチテンソルの縮約を取ることで、
スカラー曲率

$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\eta} R_{\eta\mu}$$

が定義される。

また参考までに、最初の準備で記した

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\kappa} = -R^{\mu}_{\nu\kappa\lambda} \quad (9.34)$$

$$R_{\mu\nu\lambda\kappa} = R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\nu\mu\lambda\kappa}, \quad R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -R_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (9.37)$$

も再記しておく。

以上を次の準備とし、2つ目の本題に入ります。

(問) ビアンキ恒等式(9.38)の左辺に $g^{\kappa\mu}$ をかけて縮約し、またその後に $g^{\nu\eta}$ をかけて縮約をして、縮約したビアンキ恒等式

$$\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \quad (9.40)$$

を導出せよ。P127(9.40)

(解)

(式(9.38)の第1項の縮約)

$g^{\kappa\mu} \nabla_\lambda R_{\mu\nu\kappa\eta}$ は、教科書に書いてあるように

$$g^{\kappa\mu} \nabla_\lambda R_{\mu\nu\kappa\eta} = \nabla_\lambda (g^{\kappa\mu} R_{\mu\nu\kappa\eta}) = \nabla_\lambda R_{\nu\eta}$$

である。

そして、これに $g^{\nu\eta}$ をかけて、また縮約を取ると

$$g^{\nu\eta} \nabla_\lambda R_{\nu\eta} = \nabla_\lambda (g^{\nu\eta} R_{\nu\eta}) = \underline{\nabla_\lambda R} \quad \text{---①}$$

(式(9.38)の第2項の縮約)

$g^{\kappa\mu} \nabla_\eta R_{\mu\nu\lambda\kappa}$ は、式(9.37)も用いて

$$g^{\kappa\mu} \nabla_\eta R_{\mu\nu\lambda\kappa} = -\nabla_\eta (g^{\kappa\mu} R_{\mu\nu\kappa\lambda}) = -\nabla_\eta R_{\nu\lambda}$$

である。

そして、これに $g^{\nu\eta}$ をかけて、また縮約を取ると

$$-g^{\nu\eta} \nabla_\eta R_{\nu\lambda} = -\nabla_\eta (g^{\nu\eta} R_{\nu\lambda}) = -\nabla_\eta R_\lambda^\eta = \underline{-\nabla_\kappa R_\lambda^\kappa} \quad \text{---②}$$

(式(9.38)の第3項の縮約)

$g^{\kappa\mu} \nabla_\kappa R_{\mu\nu\eta\lambda}$ は

$$g^{\kappa\mu} \nabla_\kappa R_{\mu\nu\eta\lambda} = \nabla_\kappa (g^{\kappa\mu} R_{\mu\nu\eta\lambda}) = \nabla_\kappa R_{\nu\eta\lambda}^\kappa$$

である。

そして、これに $g^{\nu\eta}$ をかけて、また縮約を取る。式(9.34)を用いる。そして、縮約についての式(9.39)と同様の考え方を用いて

$$g^{\nu\eta} \nabla_\kappa R_{\nu\eta\lambda}^\kappa = -\nabla_\kappa (g^{\nu\eta} R_{\nu\lambda\eta}^\kappa) = \underline{-\nabla_\kappa R_\lambda^\kappa} \quad \text{---③}$$

(①、②、③を加え合わせる)

②、③について、 κ を ν に揃える操作をし、そして3つを加え合わせる。また、加え合わせた式は0であるから

$$-\nabla_\nu (2R_\lambda^\nu - \delta_\lambda^\nu R) = 0$$

を得る。

この式を 2 で割り、 $-g^{\mu\lambda}$ をかけて縮約を取ると

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \{ \nabla_\nu (2R^\nu_\lambda - \delta^\nu_\lambda R) \} \\
 &= \nabla_\nu \left\{ \left(g^{\mu\lambda} R^\nu_\lambda - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \delta^\nu_\lambda R \right) \right\} \\
 &= \nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \quad (9.40)
 \end{aligned}$$

と縮約したビアンキ恒等式の導出がなされた。