

第 1 章

§ 1.3

- (1) 光子や電子のエネルギー ε の式を表せ (アインシュタイン - ド・ブロイの関係式)。

P11(1)

- (2) 光子や電子の運動量 p の式を表せ (アインシュタイン - ド・ブロイの関係式)。P11(1)

- (3) 自由電子の古典力学的なエネルギー ε の式を表せ。P11

§ 1.4

- (4) 時間に依存しないシュレディンガー方程式を書け。P14(2)

- (5) 時間に依存するシュレディンガー方程式を書け。P15(4)

第2章

§2.3

- (1) 演算子 $\mathbf{p}$ を表せ。P31(2b)
- (2) 粒子の x 座標の期待値の式を表せ。P33(3a)
- (3) P35(9)式の $m \frac{d^2}{dt^2} \bar{x} =$ を導く。まず $\frac{d}{dt} \bar{x}$ を求めよ。P34
- (4) グリーンの定理

$$\iiint (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx dy dz = \iint (u \nabla v - v \nabla u)_n dS$$

を(3)の答えに適用する。波束が局在して、その適用した面積分が0になることを用いて $m \frac{d}{dt} \bar{x}$ を求めよ。P35(8)

- (5) (4)の $m \frac{d}{dt} \bar{x}$ をもう一度 t で微分して同様の手続きを行い、(9)式を導け。そして、波束の重心の運動を表す式を導け。P35(9), P36(11)
- (6) 波束 $\psi(\mathbf{r}, t)$ で表される粒子の運動量の期待値は $\bar{\mathbf{p}} = \iiint \psi^* (-i\hbar \nabla \psi) d\mathbf{r}$ で与えられることを示せ。P36 例題

§2.4

- (7) 定常波の波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ の式を表せ。P38(2)
- (8) (7)の場合のエネルギー固有値 ε を求めよ。P38
- (9) (7)のような場合、粒子の存在確率が時間に無関係(定常状態)であることを示せ。P39(6)
- (10) H の固有関数 $\varphi_n(\mathbf{r})$ とエネルギー固有値 ε_n を用いて、(2)式に対応する波動関数 $\psi_n(\mathbf{r}, t)$ を表せ。P40(10)

§2.5

- (11) 3辺の長さが a, b, c の直方体の箱に閉じ込められた粒子を考える。そのシュレディンガー方程式を書き、1次元の問題になるようにせよ。P42(4)
- (12) 境界条件よりシュレディンガー方程式を解き、固有関数を求める。この問題の規格化条件を答えよ。P43
- (13) 固有関数 $\varphi(\mathbf{r})$ とエネルギー固有値 ε を求めよ。P44(8)(9)
- (14) (11)の問題で $a = b = c$ でかつ、エネルギーが $14 \times \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$ のときの縮退の数を求めよ。また、 c が a, b に比べて少し大きくなったときのエネルギー準位の分裂を求めよ。P47

§ 2.6

- (1 5) 3次元調和振動子のシュレディンガー方程式を書き、1次元の問題になるようにせよ。P48
- (1 6) (11)式で、 x と ε の代わりに $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, $\lambda = \frac{2\varepsilon}{\hbar\omega}$ とにおいて、(11)式を書き改めよ。P49(13)
- (1 7) (13)式の解を求めるために $X(\xi) = f(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)$ とにおいて、 f に対する微分方程式を求めよ。P49(15)
- (1 8) (1 7) の方程式の解 $f(\xi)$ を求めるために、 $f(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \xi^l$ と展開して代入し、 ξ^l について係数比較せよ。P50(17)
- (1 9) 波動関数が発散しないことを表す λ の条件式を求めよ。P50(18)
- (2 0) (1 9) の条件式より、それから先の $c_{l+2}, c_{l+4}, \dots$ はすべて0になる。しかし、 $c_{l+1}, c_{l+3}, \dots$ が別に存在して無限に続いては何ものならないから、それは最初の項(c_0 または c_1)からずっと0でなければならない。このことを考えて、 $\lambda = 1, 3, 5, 7, 9$ の場合の $f(\xi)$ を求めよ。P50
- (2 1) P50 の(20)式のエルミート多項式 $H_n(\xi)$ についての微分方程式や(21)式を参考にして、 $X_n(x)$ 、エネルギー固有値 ε_n を求めよ。P51(24a)(24b)
- (2 2) 調和振動子に関する演算子(27a)式、(27b)式について(28)式を用いて、(29a)式と(29b)式を示し、(30)式を示せ。P53(29a)(29b)(30)
- (2 3) 演算子 a^*, a を用いてハミルトニアンが $H = \hbar\omega\left(a^*a + \frac{1}{2}\right)$ と表されることを示せ。
P53(31)
- (2 4) 演算子 a^*, a を用いて、状態 $X_n(x)$ における x^2 の期待値を求めよ。そして、ポテンシャル $V(x)$ の期待値を求めよ。P54 例題

第3章

§ 3.1

- (1) いくつかの変数 $x_1, x_2 \dots x_s$ の関数 $\Psi(x_1, x_2 \dots x_s)$ と $\Phi(x_1, x_2 \dots x_s)$ の内積の定義式を表せ。また 2 つの関数 Ψ と Φ が直交するのはどんな時か答えよ。P56(2)
- (2) 3次元の箱の中の粒子の固有関数 $\varphi_{nms}(x, y, z) = X_n(x)Y_m(y)Z_s(z)$ と $\varphi_{n'm's'}(x, y, z) = X_{n'}(x)Y_{m'}(y)Z_{s'}(z)$ の内積は $\delta_{nn'}\delta_{mm'}\delta_{ss'}$ となることを示せ。P57(5)

§ 3.2

- (3) ある関数 $f(x)$ がフーリエ級数で展開できるとし、その式を表せ。P58(1)
- (4) (3) で求めた式の三角関数の係数 a_m, b_m を求めよ。P59(2a)(2b)
- (5) (3a)式、(3b)式は関数系 $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots$ が互いに直交することを示している。上記の三角関数の系は区間 $[-\pi, \pi]$ において完全系をつくっている。 $\sin$ 、 $\cos$ から発展させ、 $\exp$ の虚数の指数関数 $u_n(x)$ を関数系として考える。この関数系で $f(x)$ が展開できるとする。 $u_n(x)$ を求めよ。 $u_n(x)$ の規格化もせよ。P60(5)
- (6) 関数 $f(x)$ を $u_n(x)$ で展開した式を求めよ。そして $f(x)$ について、 $n = m$ となる展開係数 c_m の式を表せ。P60(7)(8)(9)
- (7) (6)式、(8)式について積分区間を、 $[-\pi, \pi]$ でなく $[-l, l]$ にするにはどうすればよいか。またその時の $u_n(x)$ を求めよ。P60(10)
- (8) (7) の場合の $f(x), c_n$ を表し、 c_n の代りに $F_n = \sqrt{\frac{l}{\pi}} c_n$ で定義される F_n を用いて、この2つの式を表せ。P61(14a)(14b)(15a)(15b)
- (9) (15a)式の Σ を変数 k による積分 $\int$ に変える。 $l \rightarrow \infty$ を考慮し、 k をどう置いたらよいか答えよ。P61
- (10) (9) の答えも考え併せて、(15a)式を k 積分で表せ。また、(15b)式も $l \rightarrow \infty$ として書き改めよ。P62(16a)(16b)

- (11) $f(x)$ としてガウス関数 $f(x) = A \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(x - x_0)^2\right\}$ にフーリエ変換をして、 $F(k)$ を求めよ。そして、 $|F(k)|$ も k に関するガウス関数であることを確かめよ。P63(19)
- (12) (16a)式、(16b)式を変数が x だけでなく、 y や z も考えた時の式を表せ。P63(20a)(20b)

§ 3.3

- (13) 位置と運動量の両方に依存するような物理量 $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ の期待値は、どう求めればよいか答えよ。P65(3)
- (14) 角運動量演算子 $\mathbf{L}$ の式を表せ。P65(4)
- (15) § 2.5 で扱った箱の中の粒子の $\overline{p_x}$ 、 $\overline{p_x^2}$ を求めよ。P66 例題

§ 3.4

- (16) 物理量 $F(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ を表す演算子 $F(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)$ に対して、 $F(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)\varphi(\mathbf{r}) = f\varphi(\mathbf{r})$ を満たす関数 $\varphi(\mathbf{r})$ で表されるような運動を行う粒子があったとすれば、その粒子について物理量 F を測定した時には常に確定値 f が得られる。シュレディンガー方程式から求めた関数 $\varphi(\mathbf{r})$ が $F(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)\varphi(\mathbf{r}) = f\varphi(\mathbf{r})$ を満たさない時の $\bar{F}$ を求める。固有値方程式 $F(\mathbf{r}, -i\hbar\nabla)\chi_j(\mathbf{r}) = f_j\chi_j(\mathbf{r})$ を解いて、 F のすべての固有値 $f_1(\mathbf{r}), f_2(\mathbf{r}) \dots$ および、規格化直交性を持つ固有関数 $\chi_1, \chi_2 \dots$ が求まったとする。そして、波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ が $\psi(\mathbf{r}, t) = c_1(t)\chi_1(\mathbf{r}) + c_2(t)\chi_2(\mathbf{r}) + \dots$ と展開できたとして、 $\bar{F}$ を求めよ。P69(8)
- (17) F という量を観測した時、 f_1 を得る確率が p_1 、 f_2 を得る確率が p_2 、 $\dots$ であるとする。 p_n を(16)の答えを用いて表せ。P69
- (18) $c_n(t)$ を $\psi(\mathbf{r}, t), \chi_n(\mathbf{r})$ を用いて表し、 p_n を表せ。P69(9)
- (19) $\exp(ik_x x)$ と $\exp(-ik_x x)$ を $[0, a]$ で規格化して χ_+, χ_- とし、§ 2.5の箱の中の粒子の波動関数の x 部分 $X(x)$ をこの χ_+, χ_- の一次結合で表せ。P70
- (20) χ_+ と χ_- が p_x の固有関数であることを確かめ、それぞれの固有値を求めよ。P69
- (21) p_x の期待値を $\bar{F} = \sum_n p_n f_n$ の考えより求めよ。P70

§ 3.5

- (22) 運動量の固有関数 $\varphi(\mathbf{r})$ と固有値を求めよ。P71(1)(2)
- (23) § 3.2(21a)式に対応する、関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ を運動量固有関数で展開して積分で表した式を答えよ。また $C(\mathbf{k}, t)$ を表せ。P71(3), P72(4)
- (24) $\mathbf{p}$ を測定した時に値 $\hbar\mathbf{k}$ を得る確率が $|C(\mathbf{k}, t)|^2$ に比例する。これより、 $\psi(\mathbf{r}, t)$ で表される粒子について運動量を測定したときに、
 p_x が $\hbar k_x$ と $\hbar(k_x + dk_x)$ の間
 p_y が $\hbar k_y$ と $\hbar(k_y + dk_y)$ の間
 p_z が $\hbar k_z$ と $\hbar(k_z + dk_z)$ の間
 に見出される確率を表せ。P72
- (25) $\psi(\mathbf{r}, t)$ がエネルギー固有値 $\varepsilon = \hbar\omega$ をもつ定常状態であれば、 $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t}\varphi(\mathbf{r})$ となる。この時の(3)式、(4)式を書き換えよ。P73(5)(6)
- (26) (25)の答え(5)式、(6)式を用いて、3次元調和振動子の $C(\mathbf{k})$ を求める。§ 2.6(24a)式、(24b)式より、エネルギー固有値 ε と、基底状態の固有関数 $\varphi_{000}(\mathbf{r})$ を求めよ。P73(7)
- (27) (26)の答えより、 $C(\mathbf{k})$ を求めよ。P73(8)
- (28) 3次元調和振動子の波動関数(7)式より $\overline{x^2}$ を求めよ。そして粒子の運動範囲が $-\sqrt{\overline{x^2}}$ と $+\sqrt{\overline{x^2}}$ の間であるとし、位置の不確定さ Δx を求めよ。同様に $\Delta y, \Delta z$ も答えよ。P74(9)(10)
- (29) (28)と同様に $\Delta k_x, \Delta k_y, \Delta k_z$ を求め、 $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ を求めよ。そして、 $\Delta x \cdot \Delta p_x$ 、 $\Delta y \cdot \Delta p_y$ 、 $\Delta z \cdot \Delta p_z$ を求めよ。P74(11)(12)(13)

§ 3.6

(3 0) 外力がない場合のハミルトニアン固有関数は平面波 $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ である。固有値、角振動数 ω 、波長 λ を求めよ。そして、位相速度 v_p を求めよ。P76(2)(3)(4)

(3 1) x 方向に進む波束を考える。それは $\exp\{i(kx - \omega t)\}$ をいろいろな k について重ね合わせたものである。 ω は k の関数であり、重ね合わせる際の振幅 $|C(k)|$ も k の関数である。これら成分波のうちで、最も振幅の大きいものの波数を k_m 、この k_m に近い波数をもった別の成分波を1つ考えてその波数を k とする。それぞれの波は

$$C(k_m)\exp\{i(k_mx - \omega_mt)\} = |C(k_m)|\exp\{i(k_mx - \omega_mt + \delta_m)\}$$

$$C(k)\exp\{i(kx - \omega t)\} = |C(k)|\exp\{i(kx - \omega t + \delta)\}$$

と表されるが、これらを重ねた時に互いに振動が強め合うのはその位相が等しいところである。今、時刻 t に位置 x に波束の重心があったとして成り立つ等式を表せ。そして、時間が少し(Δt)たつて、重心が x から $x + \Delta x$ に移った時に成り立つ等式を

考え併せ、 $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_G$ (群速度) を求めよ。P77,P78(6)(7)

(3 2) 波束の波動関数 $\psi(x, t)$ の初期条件を $\psi(x, 0) = f(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(ik_0x - \frac{\alpha}{2}x^2\right)$ と与える。

そしてそれより、 $\psi(x, t)$ と波束の拡散を求める。まず $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ を求めよ。そして $f(x)$ をフーリエ逆変換で考えて k 積分の式で表せ。P79(10)(11)

(3 3) $\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k, t) e^{ikx} dk$ —(13)において、外力がはたらかないとして、シュレディンガー方程式より $C(k, t)$ を求める。 $t = 0$ のときに(13)式が(11)式と一致すること

より $C(k, t)$ を求めよ。そして、 $\psi(x, t)$ を k 積分の式で表せ。 $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$ とする。

P79,P80(14)

(3 4) (3 3) の $\psi(x, t)$ の積分を実行せよ。P80(16),P81(16a)

(3 5) $|\psi(x, t)|^2$ を計算し、これが最大値になるところの $x = \bar{x}$ を求めよ。そして

$$\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right) = x' \text{と表すとして、(17)式の指数について、} \exp\left\{-\frac{x'^2}{\Delta(t)^2}\right\} \text{が} e^{-1} \text{になる}$$

2つの x' の間の幅 $2\Delta(t)$ を求めよ。P81(18)(19)

§ 3.7

(3 6) (1a)式に $\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right)^{1/4}$ を掛けたものを $f(x)$ とし、 $\alpha \rightarrow \infty$ とした時の $f(x)$ を求めよ。そして、

それに対する $F(k)$ を求めよ。P84(7a)(7b)

この答えより $e^{-ikx_0} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \delta(x - x_0) dx$ がわかる。

(37) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0)$ を示す。

$$\int_{-\infty}^{\xi} \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & \xi < x_0 \\ 1 & \xi > x_0 \end{cases}$$

は $\xi = x_0$ のところで 0 から突然 1 に上がる階段関数である。この関数を $\eta(x - x_0)$

と書くことにする。 $\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \eta(x - x_0)$ である。これを用いて

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0)$$

を示せ。P85(12)

(38) $\delta(x - x_0)$ と $\delta(x_0 - x)$ の関係を求めよ。P86(13)

(39) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$ を求めよ。P86(9)

(40) (12)式より位置演算子が固有値方程式 $x\delta(x - x_0) = x_0\delta(x - x_0)$ を満たすことを示せ。

P86

(41) 3次元の場合の δ 関数 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ の定義を示せ。P86(17)

(42) (9)式、(12)式を 3次元の場合の $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\phi - \phi_0)$ の式にせよ。P86(9a), P87(12a)

(43) (16)式を 3次元の式にせよ。P87(16a)

(44) (12a)式を $\psi(\mathbf{r}, t)$ に対して適用し、これを波動関数を $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ で展開したものとみなす。そして $\bar{F} = \sum_n p_n f_n$ の考え方より、 $\mathbf{r}$ の期待値が $\bar{\mathbf{r}} = \iiint |\psi(\mathbf{r}', t)|^2 \mathbf{r}' d\mathbf{r}'$ となることを説明せよ。P87

§ 3.8

(45) 確率の流れの式を 1次元の場合に求める。 $|\psi(x, t)|^2$ を任意の範囲 $a \leq x \leq b$ で積分したものは、粒子をこの範囲内に見出す確率を表す。それについて、符号を変えて

時間微分した式 $-\frac{d}{dt} \int_a^b \psi^* \psi dx =$ を求めよ。P88(1)

(46) 確率の減少は、それがこの区間 (a, b) から外へ流れ出すためであると考えれば、(1)式は、 $x = b$ からの流出と $x = a$ での流入の差であると考えられる。(1)式の(右辺)に関して P89 の上の式を導け。P89

(47) グリーンの定理 (P35) を用いて 3次元の場合の確率の流れの式を求めよ。P89(2)

(48) (2)式で V として ψ が定義される全領域をとると、 $\iiint_V |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = \text{一定}$ となることを説明せよ。P89

(49) (2)式より確率の流れの密度 $S(\mathbf{r}, t)$ の式を求めよ。P89(4)

第4章

§4.1

- (1) 粒子に対するポテンシャルが定点(原点にとる)からの距離 r だけの関数 $V(r)$ の場合に、時間に依存しないシュレディンガー方程式は

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + V(r)\right\}\varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon\varphi(\mathbf{r}) \text{ である。これを解くために } x, y, z \text{ の代わ}$$

りに r, θ, ϕ を用いた方が便利である。そこで $\frac{\partial}{\partial x}$ 等の微分演算子を r, θ, ϕ で表すことを

考える。 r, θ, ϕ を x, y, z の関数とみて、 $\frac{\partial}{\partial x} =$, $\frac{\partial}{\partial y} =$, $\frac{\partial}{\partial z} =$ を初等的に表せ。

P92(3a)(3b)(3c)

- (2) ∇^2 を極座標で表すため、 x, y, z を極座標で表せ。P92(2)
- (3) $\frac{\partial r}{\partial x}$ や $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ などを求めるため、 r, θ, ϕ を x, y, z で表せ。P92
- (4) $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$ を $(r), \theta, \phi$ で表せ。P92
- (5) $\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$ を r, θ, ϕ で表せ。P92
- (6) $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial z}$ を r, θ, ϕ で表せ。そして $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ を r, θ, ϕ で表せ。P92, P93(4a)(4b)(4c)
- (7) ラプラシアン $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} =$ を極座標で表せ。P93(5)(6)
- (8) (4a)式~(4c)式から l_x, l_y, l_z の式を極座標で表せ。P93(7a)(7b)(7c)
- (9) $\mathbf{l}^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$ の式を求めよ。P93(8)
- (10) 以上より、極座標に直したシュレディンガー方程式は

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta\right) + V(r)\right\}\varphi(r, \theta, \phi) = \varepsilon\varphi(r, \theta, \phi)$$

となる。この方程式を解くために $\varphi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ とおいて代入する。そして r だけの関数と θ, ϕ だけの関数で等号を結んだ式を求め、(左辺)=(右辺)= λ (定数)とし、それによる2つの微分方程式を求めよ。P94(11)(12)

- (11) (10)の R についての微分方程式で $R(r) = \frac{1}{r}\chi(r)$ とおいて、この式を書き改めよ。
P94(14)

- (12) $l_+ = l_x + il_y, l_- = l_x - il_y$ で定義される演算子 $l_{\pm}$ を θ, ϕ を用いて表せ。その表式と(7c)

式を $\mathbf{l}^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \frac{1}{2}(l_+l_- + l_-l_+) + l_z^2$ に代入して(8)式を導け。

P94, P95 例題

§ 4.2

- (1 3) $\Delta Y(\theta, \phi) + \lambda Y(\theta, \phi) = 0$ の固有値 λ を答えよ。P95(2)
- (1 4) $Y_l^m(\theta, \phi)$ の m はどんな値をとるか答えよ。P95
- (1 5) 角運動量の2乗 $\mathbf{l}^2$ の固有関数と固有値を答えよ。P96(7)
- (1 6) l_z の固有関数と固有値を答えよ。P97(8)
- (1 7) 角運動量の大きさは、いくらか答えよ。P97
- (1 8) $l_{\pm} = l_x \pm il_y$ を $Y_l^m(\theta, \phi)$ に作用させると、おおよそどうなるか答えよ。P98
- (1 9) 角運動量の固有関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ の規格化直交性を表す式を表せ。P99(11)
- (2 0) (10a)式、(10b)式、(8)式の3式を用いて、(7)式を求めよ。P100 例題 1

§ 4.3

- (2 1) § 4.1(14)式のシュレディンガー方程式の動径部分の式について、遠心力ポテンシャルを求めて表せ。P101(1)
- (2 2) 原点に電荷 Ze の核があるとする。それによる中心力場における電子のシュレディンガー方程式の動径部分の式を表せ。P102(3)
- (2 3) (2 2) の方程式を $\rho = \frac{Z}{a_0}r, \eta = \frac{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2}{Z^2me^4}\epsilon$ とにおいて書き改めよ。P102(5)
- (2 4) $rR_{nl}(r) - r$ グラフを R_{1s}, R_{2s}, R_{2p} について求めよ。P103.4・4 図
- (2 5) $R_{nl}(r)$ の規格化を表す式を求めよ。また量子数も考えて、直交性を表す式も求めよ。P102(7), P103(8)
- (2 6) 主量子数 n と方位量子数 l の間の不等式を答えよ。P102(6)
- (2 7) この電子のエネルギー ϵ_n は、 n で大体どう表されるか答えよ。P102(6)
- (2 8) $n = 1, 2, 3, 4$ の時の縮退度を求めよ。P104

§ 4.4

- (2 9) 粒子に対するポテンシャル $V(r)$ が、4・7 図の井戸型ポテンシャルである場合を考える。ここでは V_0 が無窮大であるとする。シュレディンガー方程式の動径部分の式は(1)式で与えられる。 $\rho = \sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}r$ とにおいて、式を書き改めよ。P106
- (3 0) (2 9) の答えの式の解は球ベッセル関数 $j_l(\rho)$ で与えられる。境界条件は $j_l\left(\sqrt{\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}}a\right) = 0$ である。 $j_l(\rho) = 0$ の n 番目の根を ρ_{nl} とすると、エネルギー ϵ_{nl} はどう表されるか求めよ。P107

§ 4.5

(3 1) 3次元調和振動子のポテンシャルを極座標で表すと

$$V = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{m\omega^2}{2}r^2 \quad \text{という形になり、この力は中心力であることが}$$

わかる。固有関数は $\varphi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ と書けると同時に、 $\varphi(\mathbf{r}) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ とも表せるので、この形に書き直すことを考える。まず、基底状態

$n_x = n_y = n_z = 0$ を考える。§ 2.6(24a)式より $\varphi_{000}(\mathbf{r})$ を求め、s状態であることを示せ。P109(7)

(3 2) 次に第1励起状態、 $n_x + n_y + n_z = 1$ を考える。 $\varphi_{100}(\mathbf{r}), \varphi_{010}(\mathbf{r}), \varphi_{001}(\mathbf{r})$ を§ 2.6 (24a)式より求め、 x, y, z のところを極座標で表せ。また P96 の $Y_l^m(\theta, \phi)$ の具体的な関数

形を用いて、そして $R_1(r) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}f_1(r)$ を用いて、各第1励起状態を $R_1(r)Y_l^m(\theta, \phi)$ の

1次結合の形に表せ。P109(9a)(9b)(9c)(10a)(10b)(10c)

(3 3) (10a)式,(10b)式から逆に解いて、 $R_1(r)Y_1^1(\theta, \phi), R_1(r)Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ を $\varphi_{100}(\mathbf{r}), \varphi_{010}(\mathbf{r})$ の1次結合で表せ。P110(12a)(12b)

第5章

§5.1

- (1) 粒子を標的に当てて散乱させる。入射粒子を大きさのない質点とみなし、標的粒子の半径を a とする。衝突が1回しか起こらない場合、そして標的が5-3図のようにまばらで重ならない時を考える。散乱を起こす物質が単位体積に n 個の標的粒子を含み、入射粒子線方向の厚みが δ であるとする。入射粒子線に垂直な面積 A の部分を見かして見た時の(標的の数)×(標的の面積)を考えて、この物質を通り抜けるときに散乱を受ける粒子の全体に対する割合を求めよ。P114(1)
- (2) 5-2図の散乱角 θ と衝突パラメータ b を考える。 θ は b の関数である。1個の標的のうち半径が b と $b+db$ の円にはさまれた部分に入射粒子が当たると、散乱角は θ と $\theta+d\theta$ の間に入る。5-4図の灰色の部分の面積を考えて、 θ と $\theta+d\theta$ の間の散乱角で出ていく割合を求めよ。そして $b=b(\theta)$ より、この割合を変数 θ についての式として表せ。P115(2)(3)
- (3) (2)の答えの式で $2\pi b \frac{db}{d\theta} = q(\theta)$ と書けば(3)式は(4)式となる。これは5-5図の斜線の部分全体を通る散乱粒子の割合である。ここで、入射方向との間の角が θ であるような方向の単位立体角あたりを単位時間に通る粒子の割合を求める。5-5図で立体角を考えて、割合を求めよ。P116
- (4) (3)の割合から、 θ 方向の微小立体角 $d\Omega$ 内に散乱されて出ていく粒子の割合が $n\delta\sigma(\theta)d\Omega$ であるといえる。 $\sigma(\theta) = \left| \frac{b(\theta) db}{\sin\theta d\theta} \right|$ であり、微分断面積という。実験のときには大きさ(面積 ΔS とする)のきまつた検出器で散乱粒子を受けるとし、散乱体からの距離を R として検出器の立体角を求めよ。そして、この検出器が受ける粒子数の割合を求めよ。P116
- (5) b を θ の関数として求めれば、 $q(\theta), \sigma(\theta)$ も求まる。5-8図を参照して標的の質量が無限大(すなわち不動)で、衝突が完全になめらかな弾性衝突である場合について $q(\theta), \sigma(\theta)$ を求めよ。P117, P118 例題

§5.2

- (6) 原子核による α 粒子(電荷は+)の散乱を考える。 $\sigma(\theta)$ を求める。この場合の力の大きさは $\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ で斥力である。原子核を原点として α 粒子の位置を極座標 r, φ で表す。運動方程式を立てよ。P118(1)(2)
- (7) (2)式より $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{一定}$ を示し、この(右辺)を遠方での速さ v_0 と衝突パラメータ b を用いて表せ。角運動量一定である。P119(3)

(8) (7)の答えを動径方向の運動方程式に代入せよ。そして $r = \frac{1}{u}$ とおくことを考える。

u は φ の関数で、 φ を通して t に依存しているとみなして、 $\frac{d}{dt}$ を u, φ を用いて表せ。そ

して、 $\frac{d^2 r}{dt^2}$ を u, φ を用いて表し、(4)式に代入せよ。P119(4)(5)

(9) (5)式の右辺の()内を ξ とおき、 ξ の一般解を求めよ。そして、 $\frac{1}{r}$ を表し、これを微分して $\frac{dr}{dt}$ を求めよ。P119(6)(7)

(10) (9)の答えの積分定数 A, δ を決めるには、入射する $\varphi = \pi$ のとき $r = \infty$ 、 $\dot{r} = -v_0$ (5-10 図)であることを用いる。 δ を表せ。P120

(11) (7)式を 5-11 図のように描いてみれば、5-10 図の左方無限遠 ($\varphi = \pi$) から飛来して、右上 ($\varphi = \theta$) に飛び去る粒子の運動範囲は、 $\varphi = \pi$ から φ が減少して $\varphi = \pi - \delta$ で $\dot{r} = 0$ (最近接点) になり、さらに同じ角 δ だけ φ が減ったところが $\varphi = \theta$ である。これより δ と θ の関係を求めよ。そして(10)より、 b と θ の関係を求めよ。P120(8)

(12) ラザフォード散乱の $\sigma(\theta)$ を求めよ。P120(9)

§ 5.3

(13) 5-13 図のポテンシャル中の粒子の運動を考える。 $x < 0$ 側から x 軸正方向に向かう平面波についての反射、透過を見る。(3)式を考慮し、 x 軸正向きの平面波と負向きの平面波を答えよ。P123

(14) $x = 0$ で 5-13 図のポテンシャル壁にぶつかった入射波は、その一部分が反射して e^{-ikx} として左方へ去り、一部分は壁を乗り越えて $x > a$ の部分へ出て右方へ去る。これを表す $x \leq 0$ と $x \geq a$ の波動関数を表せ。P123(6a)(6b)

(15) (14)の問題の系のエネルギー固有値 ε を求めよ。P124(8)

(16) 5-13 図のポテンシャルの $0 < x < a$ でのシュレディンガー方程式より、この範囲の波動関数 $\varphi(x)$ を $\varepsilon > V_0$ の場合に表せ。P124(6c)

(17) (6a)式、(6b)式、(6c)式に境界条件を適用し、反射率 $\left|\frac{B}{A}\right|^2$ 、透過率 $\left|\frac{C}{A}\right|^2$ を求めよ。

P126(13a)(13b)

(18) (16)の問題で $\varepsilon < V_0$ の場合に波動関数 $\varphi(x)$ を表せ。P126(6c)'

(19) (18)の場合に境界条件を適用し、透過率 $\left|\frac{C}{A}\right|^2$ を求めよ。P126(13b)'

§ 5.4

(2 0) 3次元の散乱を考える。シュレディンガー方程式は

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r})\right\}\varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon\varphi(\mathbf{r}) \text{ である。 § 5.3 と同様に入射粒子のビームを平面波}$$

$e^{ik_0\mathbf{r}}$ で表すことにする。エネルギーは $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m}k_0^2$ である。この波が $V(\mathbf{r})$ の力の範囲

内に入れば、影響を受け、入射波に散乱波が重ね合わされる。そこで(1)式の解に $\varphi(\mathbf{r}) = e^{ik_0\mathbf{r}} + g(\mathbf{r})$ という形を仮定する。 $g(\mathbf{r})$ が散乱波を表す。(3)式と(2)式をシュレディンガー方程式(1)式に代入せよ。P128(4)

(2 1) (2 0) の答えで近似として、 $V(\mathbf{r})$ が小さく、散乱波 $g(\mathbf{r})$ も小さいとして(4)式の

$$V(\mathbf{r})g(\mathbf{r}) \text{ の項を省略すると、 } \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2 + k_0^2)g(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})e^{ik_0\mathbf{r}} \text{ となる。この } g(\mathbf{r}) \text{ を求}$$

めることを考える。まず $\mathbf{r} \neq 0$ で $(\nabla^2 + k_0^2)\frac{e^{ik_0\mathbf{r}}}{r} = 0$ を示せ。次に $\nabla^2\frac{1}{r}$ について $\mathbf{r}=0$

も含む式を表せ。これらより $(\nabla^2 + k_0^2)\frac{e^{ik_0\mathbf{r}}}{r} =$ を、 $\mathbf{r}=0$ で $\frac{k_0^2 e^{ik_0\mathbf{r}}}{r}$ については $\delta(\mathbf{r})$

に比べて省略するとして表せ。またこれを原点を $-\mathbf{r}'$ 移した式、つまり、 $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ とした式に変えよ。P129(8),P130(9),P131(10)

(2 2) $f(\mathbf{r}') = \int f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}$ を示す。ただし、右辺の積分は $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ を含む勝手な領域とする。これを示すためには δ 関数を 5-16 図のような $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$ のごく近くだけで0でない関数と考え、この範囲では $f(\mathbf{r})$ の変化はそれほどいちじるしくないとみて、 $f(\mathbf{r})$ をその中心の値 $f(\mathbf{r}')$ で置き換え、積分の外へ出す。これより示せ。P131

(2 3) ポテンシャルが広がりをもつときの $g(\mathbf{r})$ を求める。(10)式の両辺に $-\frac{1}{4\pi}V(\mathbf{r}')e^{ik_0\mathbf{r}'}$ を掛けて $\mathbf{r}'$ で積分し、(5)式と比較し、 $g(\mathbf{r})$ の表式を求めよ。P132(14)

(2 4) 散乱の中心は原点にあって、 $V(\mathbf{r}')$ が 0 でない位置 $\mathbf{r}'$ はその近くに限定されている。(14)式の $g(\mathbf{r})$ を、観測点 $\mathbf{r}$ はその $\mathbf{r}'$ より遠いとして、遠い $\mathbf{r}$ における $g(\mathbf{r})$ の漸近形を求める。そのために 5-17 図の $PQ = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ を PH に等しいとおき、 PH を求め、(14)

式に代入する。 $\mathbf{r}$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{n}$ として、 PH を表し、 $\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ を表せ。P133

(2 5) (2 4) の $\frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ の式の第 1 項だけをとって(14)式に代入し、 $k_0\mathbf{n}=\mathbf{k}'$ とおき、 $g(\mathbf{r})$ を表せ ($\mathbf{r}$ は $\mathbf{r}'$ には関係しない)。P133(15)

(26) (15)式より微分断面積 $\sigma(\theta, \phi)$ を求める。(15)式の右辺は定積分であるが、 $\mathbf{k}' = k_0 \mathbf{n}$ をとおして $\mathbf{r}$ の方向 $\mathbf{n}$ に関係するので、 $g(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ の関数として極座標 r, θ, ϕ の関数である。被積分関数は $r = |\mathbf{r}|$ には関係しない。(15)式の右辺の r に関係しない θ, ϕ だけの関数の部分を $f(\theta, \phi)$ と表す。 $f(\theta, \phi)$ を求め、 $\sigma(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2$ を求めよ。
P133(17), P134(18)

(27) $\sigma(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2$ を示す。 $\sigma(\theta, \phi)$ の定義は「 (θ, ϕ) の方向の微小立体角 $d\Omega$ 内に単位時間に散乱されて出ていく粒子の割合が $n\delta\sigma(\theta, \phi)d\Omega$ 」である。ボルン近似の設定では、5-15 図にあるように標的は 1 つである。弾性散乱であるから、入射波と反射波の速さが等しく、ともに v_0 で表されれるとする。5-19 図のように、入射波に垂直な面積 ΔS を考え、ここを時間 Δt の間に通過する入射波の確率を、まず求めよ。次に、散乱波に垂直な微小面積 ΔS を考え、ここを時間 Δt の間に通過する散乱波の確率を求めよ。以上の結果を考え併せて、 $\sigma(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2$ を示せ。P134, P135

§ 5.5

(28) § 5.4 のボルン近似を、ラザフォード散乱に適用する。 $V(r) = C \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ とし、後で

$\alpha \rightarrow 0$ とすることにする。 $I = \int V(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}'$ を求める。5-20 図のように $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'$ の方向を基準軸にとった極座標 r', θ, ϕ を用いる。 $(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'$ を r', θ 等を用いた式で表せ。P135

(29) $d\mathbf{r}'$ は、3重積分だから $d\mathbf{r}' = r'^2 dr' \sin \theta d\theta d\phi$ である。 I を求める。 I を $\cos \theta = \zeta$ と置いて置換積分せよ。P136(3)

(30) $\mathbf{k}_0$ も $\mathbf{k}'$ も長さが k_0 でその間の角が θ である。 $|\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}'|$ を k_0, θ を用いて表せ。P136(4)

(31) (30) の答えを $f(\theta)$ に代入せよ。そしてここで $\alpha \rightarrow 0$ とし、 $k_0 = \frac{mv_0}{\hbar}$ を入れて、 $f(\theta)$ を求めよ。そして、 $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$ を求めよ。P136(6)(7)

第6章

§6.1

- (1) 3次元のベクトルについて $\mathbf{V}$ を $\mathbf{U}$ にする演算を $\mathbf{U} = A\mathbf{V}$ と表すとする。 A は演算子で行列である。基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ をとれば、 A は行列表示できる。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ とし、また } \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ として}$$

行列要素 $a_{11}, \dots$ を A と $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を用いて表せ。P142(14)

- (2) 1つのベクトル $\mathbf{V}$ を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ という座標系で表した成分を (V_1, V_2, V_3) 、 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ という座標系で表した成分を (V_1', V_2', V_3') とし、

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \text{ とする } T \text{ を求める。基底 } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \text{ に対する別の基底 } \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3' \text{ の方向や}$$

関係は

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1'$	T_{11}	T_{12}	T_{13}
$\mathbf{e}_2'$	T_{21}	T_{22}	T_{23}
$\mathbf{e}_3'$	T_{31}	T_{32}	T_{33}

上表であるとする。 $T_{11} = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1, T_{12} = \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2 \dots$ 。つまり、 $T_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j$ である。

$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ を $T, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を用いて表せ。また $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を $T, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ を用いて表せ。

P143(16)(17)

- (3) $\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$ の T が $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$ であることを示す。 $\mathbf{V} = \sum_{j=1}^3 V_j \mathbf{e}_j$ である。

また $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 V_i' \mathbf{e}_i'$ である。また(2)の答えより $\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^3 T_{ij} \mathbf{e}_i'$ であることを用いて示せ。P144(18)

- (4) (3)のやり方とは逆に $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 V_i' \mathbf{e}_i'$ に $\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^3 T_{ij} \mathbf{e}_j$ を代入し、以下を示せ。

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{pmatrix} \quad \tilde{T} \text{ は } T \text{ の転置行列である。P144(19)}$$

- (5) $\tilde{T}T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv E$ (単位行列)であることを示せ。P144(21)

これより $\tilde{T} = T^{-1}$ である。

(6) 演算子 A を基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ で行列表示したものを $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

演算子 A を基底 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ で行列表示したものを $A' = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{pmatrix}$

とする。 $A' = TAT^{-1}$ の関係、 $A = T^{-1}A'T$ の関係があることを示す。(1)の答え

$a_{nm} = \mathbf{e}_n \cdot (A\mathbf{e}_m)$, $a_{ij}' = \mathbf{e}_i' \cdot (A\mathbf{e}_j')$ と(16a)式、(17a)式を用いて示せ。P145(23)(23a)

(7) 2つの行列 G, H の逆行列を G^{-1}, H^{-1} とし、 GH の逆行列を $(GH)^{-1}$ とすると

$(GH)^{-1} = H^{-1}G^{-1}$ であることを示せ。P146(24)

(8) G, H の転置行列を $\tilde{G}, \tilde{H}$ とすると $(\tilde{G}\tilde{H}) = \tilde{H}\tilde{G}$ であることを示せ。P146(25)

(9) (8)の答えより、演算 $\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ U_3' \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ の転置を表せ。P146(26)

(10) (9)の答えより、基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ で表した $\mathbf{V}, \mathbf{U}$ の内積と基底 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ で表した $\mathbf{U}', \mathbf{V}'$ の内積が等しいこと、すなわち2つのベクトルの内積は基底ベクトルの直交変換に対して不変 $U_1'V_1' + U_2'V_2' + U_3'V_3' = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3$ を示せ。P146

(11) 任意のベクトル $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$ を方向余弦 l, m, n で与えられる単位ベクトル $\mathbf{e}$

$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ に垂直な平面に射影する演算子の行列を求める。 $\mathbf{V}$ を $\mathbf{e}$ 方向とそれに垂直

な方向のベクトルの和で $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp}$ と表す。 $\mathbf{V}_{\perp} = (\text{答えの演算子}) \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$

である。よって $\mathbf{V}_{\perp}$ を求めることを考える。まず $\mathbf{V}_{\parallel}$ を求め、 $\mathbf{V}_{\perp}$ を求め、答えよ。

P147 例題

§ 6.2

(12) § 6.1の議論を3次元から n 次元に拡張する。演算子やベクトルの成分も複素数とする。2つのベクトル $\mathbf{U}$ と $\mathbf{V}$ の内積 $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ の定義を表せ。P148(1)

(13) (12)の拡張をしても、3次元の時と同様に $A' = TAT^{-1}$ は成り立つ。ベクトル $\mathbf{W}$ と $\mathbf{U} = A\mathbf{V}$ との内積が(11)式で表される、つまり基底ベクトルの変換に対して不変であることを示せ。P149, P150(11)

(14) この複素ベクトル空間での座標変換の行列には $T^{-1} = \tilde{T}^*$ (ユニタリー)の性質 (転置共役が逆行列に等しい)があることを示す。複素ベクトルの内積について $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{U})^*$ であることを用いる。(8)式より $\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l', \mathbf{e}_l' \cdot \mathbf{e}_j$ を求め、 $T^{-1} = \tilde{T}^*$ を示せ。P150

ユニタリー行列 T の変換(10a)式、(10b)式をユニタリー変換という。

- (15) エルミート行列の定義を答えよ。P151(15b)
 エルミート行列は転置共役が元の行列に等しい。
- (16) 行列 T の行列要素を T_{ij} 、 T の逆行列の (i,j) 成分の要素を T_{ij}^{-1} と表すことにする。エルミート行列 A をユニタリー行列 T で $A' = TAT^{-1}$ と変換した A' もエルミート行列であることを示す。この式に対して ij 要素、 ji 要素をとり、 A のエルミート性、 T のユニタリー性を用いて示せ。P151
- (17) A がエルミート演算子ならば $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$ が成り立つことを示せ。P151(16)
- (18) エルミート演算子について $\mathbf{A}\mathbf{V} = \alpha\mathbf{V}$ の固有値 α を求める。永年方程式を答えよ。P153(18)
- (19) 永年方程式の解 $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ がすべて実数であることを示す。 $\mathbf{A}\mathbf{V}_i = \alpha_i\mathbf{V}_i$ に対し、 $\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{V}_i = (\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{V}_i)^* = \alpha_i|\mathbf{V}_i|^2$ を示せばよい。(16)式を適用し、ベクトルの内積の順序を入れ換えると複素共役になることを用いて示せ。P153
- (20) エルミート演算子の異なる固有値に対する固有ベクトルは、互いに直交することを示す。固有値を α_k, α_l とし、それに対する固有ベクトルを $\mathbf{V}_k, \mathbf{V}_l$ として、 $\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \alpha_k\mathbf{V}_k$ 、 $\mathbf{A}\mathbf{V}_l = \alpha_l\mathbf{V}_l$ を得る。内積は $\mathbf{V}_l \cdot \mathbf{A}\mathbf{V}_k = \alpha_k(\mathbf{V}_l \cdot \mathbf{V}_k)$ 、 $\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{A}\mathbf{V}_l = \alpha_l(\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{V}_l)$ である。複素ベクトルの内積は、一般的に $\mathbf{V}_l \cdot \mathbf{V}_k \neq \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{V}_l$ である。 $(\alpha_k - \alpha_l)(\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{V}_l) = 0$ を示せば題意を満たすので($\because \alpha_k \neq \alpha_l$)、 $(\alpha_k - \alpha_l)(\mathbf{V}_k \cdot \mathbf{V}_l)$ を変形させて0になることを導き、示せ。P154
- (21) g 重に縮退した固有値に対しては、固有ベクトルは一意的には定まらない。一般に g 重に縮退した固有値に対する固有ベクトルは、 g 次元の部分空間をつくる。そこで、その空間の中に互いに直交する g 個のベクトルをとればよい。そして規格化しておき、 $\mathbf{e}_1^{(0)}, \mathbf{e}_2^{(0)}, \mathbf{e}_3^{(0)} \dots \mathbf{e}_n^{(0)}$ とすると A の行列は対角行列になることを示せ。P155
- (22) 2次元複素ベクトル空間で、規格化された直交するベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を基底にしたときに $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ のように表されるエルミート演算子 A, B があるとする。 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。また、これを対角化するユニタリー変換の行列を記せ。P155, P156
- (23) 続きで新基底 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ を(13)式より求めよ。P156
- (24) B についても(22)、(23)と同様に答えよ。P155, P156

§ 6.3

- (25) 完全直交関数系の基底を $u_1(\mathbf{q}), u_2(\mathbf{q}) \dots$ とする。関数は規格化 $\int u_n^*(\mathbf{q}) u_{n'}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \delta_{nn'}$ を満たすとする。 $\mathbf{q}$ の任意の関数 $f(\mathbf{q})$ を $u_n(\mathbf{q})$ で表し、その係数を積分で表せ。P158(7)(8)

- (26) 次に $f(\mathbf{q})$ に作用する1次演算子 F を考える。 $F f(\mathbf{q}) = F \sum_n c_n u_n(\mathbf{q}) = \sum_n c_n F u_n(\mathbf{q})$ であるが、これも $\mathbf{q}$ の関数として(7)式のように展開できるとし、その係数を積分で表せ。P159(11)
- (27) (26)の F の行列要素の定義式を答えよ。そして、それより d_m を表せ。P159(12)(13)これは(14)式という行列の関係式を表している。
- (28) (27)の答えより $g(\mathbf{q}), f(\mathbf{q}), F$ はどのような行列として表されるか答えよ。P159(15)これより以後、関数を見たらそれがベクトルに見えてこなければならないし、演算子は正方行列に見えてこなければならない。
- (29) 関数 $f(\mathbf{q})$ のノルム $\|f\|$ を、その展開係数 c_n で表せ。P161(21)
- (30) 関数 $f(\mathbf{q})$ の展開式(7)の右辺の係数 c_n に(8)式を代入して、関数系 $\{u_1(\mathbf{q}), u_2(\mathbf{q}) \dots\}$ が規格化された完全直交系であるための条件を求めよ。P161(22)
- (31) $-\pi \leq x \leq \pi$ において

$$u_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, u_2(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos x, u_3(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin x, \dots$$

一般に

$$u_{2n}(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos nx, u_{2n+1}(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin nx$$

は規格化された完全直交関数系になっている。この関数系を基底に用いたときの演算子 $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$ の行列を求めよ。また、 $\frac{d}{dx}$ の行列の2乗を計算して、それが $\frac{d^2}{dx^2}$ の行列と一致することを確認せよ。P162 例題1

- (32) 上の問題と同じ区間 $-\pi \leq x \leq \pi$ において

$$u_1'(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, u_2'(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{ix}, u_3'(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-ix}, \dots$$

一般に

$$u_{2n}'(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{nix}, u_{2n+1}'(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-nix}$$

で定義された完全正規直交関数系を基底にとったときの演算子 $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}$ の行列を求めよ。また(31)の問題の基底からこの基底へのユニタリー変換の行列 (T_{ij}) を§6.2(8)式より求めよ。P163 例題2

§ 6.4

- (3 3) 2つの関数 $\varphi_n(\mathbf{q}), \varphi_m(\mathbf{q})$ (基底 $u_1(\mathbf{q}), u_2(\mathbf{q}) \dots$) を $\varphi_n = \sum_i c_i u_i(\mathbf{q}), \varphi_m = \sum_j b_j u_j(\mathbf{q})$ と展開すれば、 $\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle$ はどう表されるか答えよ。P164(3)
- (3 4) $\langle \varphi_n | F | \varphi_m \rangle$ を積分で表せ。P165(5)
- (3 5) 非定常状態の波動関数の式を、時間に依存するシュレディンガー方程式

$$H\psi(\mathbf{q}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{q}, t)}{\partial t}$$

より求める。初期条件として $t = 0$ のときに $\psi(\mathbf{q}, 0) = \psi_0(\mathbf{q})$ を与え、その後の ψ の時間発展を調べる。完全直交系として規格化された H の固有関数 $\varphi_1(\mathbf{q}), \varphi_2(\mathbf{q}) \dots$ を用いるとする。 $\psi_0(\mathbf{q})$ をこの $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ で展開することは可能であるから、 $\psi_0(\mathbf{q}) = \sum_j a_j^0 \varphi_j(\mathbf{q}), a_j^0 = \int \varphi_j^*(\mathbf{q}) \psi_0(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$ と展開したとする。 $t \neq 0$ のときの $\psi(\mathbf{q}, t)$ を $\psi(\mathbf{q}, t) \equiv \sum_j a_j(t) \varphi_j(\mathbf{q})$ とおけば $a_j(0)$ はどう表されるか求めよ。

P167(12)

- (3 6) (11)式をシュレディンガー方程式(9)に代入し、 $\psi(\mathbf{q}, t)$ を表せ。P168(14)
- (3 7) 演算子の指数関数 e^A の定義式を答えよ。P168
- (3 8) (3 7) の答えを用いて、 $e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \varphi_n(\mathbf{q})$ を固有値 $\varepsilon_n, \varphi_n(\mathbf{q})$ を用いて表せ。P168(15)
- (3 9) $\psi(\mathbf{q}, t)$ を H と $\psi_0(\mathbf{q})$ を用いて表せ。P169(17)
- (4 0) 時刻 t_0 における波動関数が $\psi(\mathbf{q}, t_0)$ として与えられたとする。このときに、時間に依存するシュレディンガー方程式の解 $\psi(\mathbf{q}, t)$ を、(17)式について時間の原点をずらして、この $\psi(\mathbf{q}, t_0)$ と H を用いて表せ。P169(18)

§ 6.5

- (4 1) 1次元調和振動子について § 2.6 で求めた固有関数を $u_0(x), u_1(x), u_2(x) \dots$ と書く。これらは $-\infty < x < \infty$ で規格化された完全直交関数系になっている。この関数系を基底にとった場合の $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ を行列表示せよ。P170(2)
- (4 2) 演算子 a, a^* を、1次元調和振動子の固有関数を基底にとって行列表示せよ。P170(4)
- (4 3) $u_1(x), u_2(x)$ を H の固有関数であることを用いて行列表示せよ。P171
- (4 4) 行列表示を用いて $a^* u_1(x) = \sqrt{2} u_2(x)$ を示せ。P171
- (4 5) 演算子 x, x^2, p_x, p_x^2 を行列表示せよ。そしてそれよりハミルトニアン H の行列表示を、(2)式に一致することを示せ。P171(6), P172(8)(9)(10), P173

§ 6.6

- (4 6) 角運動量演算子の行列表示を行う。(3)式より l_x, l_y, l_z やその組み合わせを、基底を $Y_0^0, Y_1^1, Y_1^0, Y_1^{-1} \dots$ にして行列表示するとどんな行列になるか答えよ。P174(4)
- (4 7) l^2, l_z をある l の基底 $Y_l^l, Y_l^{l-1} \dots Y_l^0 \dots Y_l^{-l}$ で行列表示せよ。P174(5)(6)
- (4 8) $l_x + i l_y, l_x - i l_y$ を(4 7)と同じ基底で行列表示せよ。P175(8)(9)

(49) (48) の答えより l_+l_- , l_-l_+ の行列を求めよ。そして $l_+l_- - l_-l_+$ も行列で表せ。

P176(11)(12)

(50) $l_+l_- - l_-l_+$ 行列と l_z 行列の対応を、見て答えよ。また $l_+l_- - l_-l_+$ を l_x, l_y で表し、 l_x, l_y, l_z の間に成り立つ関係式を求めよ。 $l_zl_+ - l_+l_z$, $l_zl_- - l_-l_z$ はいくらになるか求め、これらより(15)式を導け。P176(13a)(14a)(13b), P177(15)

§ 6.7

(51) 座標 ($\mathbf{r}$) と運動量 ($-\hbar\nabla$) の成分の交換関係(1a)式、(1b)式を導け。P178

(52) (1a)式、(1b)式を用いて $[l_x, l_y] = i\hbar l_z$ を導け。P178

(53) 2つの物理量を表す演算子が交換可能なら、この2つに対して固有関数を一致させることができ、物理量を同時に観測して両方について確定値を得ることが可能であることを概説的に説明せよ。P178~P182

§ 6.8

(54) 交換関係(1)式、(2)式を示せ。P183

(55) $Y_l^m(\theta, \phi)$ は $l_x^2 - l_y^2$ の固有関数にはなっていない。しかし、交換関係(1)式が成り立つから、ユニタリー変換して固有関数は Y_l^m の1次結合で表せるはずである。そこで各 l に属する $2l+1$ 次元の部分空間ごとに $l_x^2 - l_y^2$ を対角化する。 $l=0,1,2$ の場合に $l_x^2 - l_y^2$ の行列を(4)式を用いてまず表せ。P184(5)

(56) $l=1$ の場合の(5)式を対角化する。(6)式として、2行2列の行列を考える。この対角行列を求めよ。P185

(57) $\alpha_1 = \hbar^2$ に対する固有関数を v_1 , $\alpha_2 = -\hbar^2$ に対するそれを v_2 とする。それらを前の基底 Y_1^1, Y_1^{-1} の1次結合で表せ。P186(13)

(58) $l=2$ の場合の(5)式を対角化する。これを対角化するため、(5)式の行列を2つの部分に分ける。 $Y_2^{\pm 1}$ の部分をユニタリー変換で対角化し、新しい固有関数を求めよ。

P186

(59) 行列の $Y_2^{\pm 2}, Y_2^0$ のところについて、永年方程式を解いて固有値を求めよ。P187

(60) 3行3列の (T_{ij}) をいきなり決めようとしないで、試みに $\chi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_2^2 + Y_2^{-2})$,

$\chi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_2^2 - Y_2^{-2})$ とおいて、 Y_2^0, χ_+, χ_- の3つを基底にとって行列を作り直せ。そ

してそれを考えて、新しい固有関数を求め、 $l_x^2 - l_y^2$ の対角行列を表せ。P187, P188

§ 6.9

(61) 波動関数の時間変化は $\psi(\mathbf{q}, t) = e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} \psi(\mathbf{q}, t_0)$ で与えられることより、物理量 F の期待値のシュレディンガー表示とハイゼンベルク表示を表せ。P189(7a)(7b)

(62) P190 の(8)式の $\psi_0(\mathbf{q})$ がハミルトニアン H の固有関数の1つに等しい場合には、 $\langle F \rangle$ は時間に関係しないことを示せ。P192 例題

§ 6.10

(6 3) 演算子 $F(t)$ の時間変化を表す式、つまりハイゼンベルクの運動方程式を導け。

P193(2)

(6 4) § 6.9(14)式、(15)式を用いてハイゼンベルクの運動方程式を導け。P193

(6 5) $e^{\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} e^{-\frac{iH(t-t_0)}{\hbar}} = 1$ を H の固有関数を用いた行列表示をして、行列の積による計算として示せ。P194

(6 6) ハミルトニアンと交換可能な演算子で表される物理量は、時間的に変化しない保存量であることをハイゼンベルクの運動方程式より示せ。P194(3)

(6 7) 1次元調和振動子のハミルトニアンは $H = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, $p_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$ で与えられる。ハイゼンベルクの運動方程式を $F = p_x$ の場合に適用し、古典力学の運動方程式と比較せよ。ヒント：§ 6.7(1a)式を用いよ。P195, P196

第 7 章

§ 7.1

- (1) 粒子のハミルトニアン H について摂動 $\lambda H'$ があるときに、そのハミルトニアンは $H = H_0 + \lambda H'$ であるとする。 H_0 の固有関数を $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)} \dots$ とする。これらは完全直交関数系であるとする。エネルギー ε_n は $\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)} + \lambda \varepsilon_n^{(1)} + \lambda^2 \varepsilon_n^{(2)} + \dots$ と書けるとして、1 次の摂動エネルギー $\varepsilon_n^{(1)}$ の表式を求めよ。P200(9)
- (2) この H の波動関数は $\varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \lambda \varphi_n^{(1)} + \dots$ とできる。 $\varphi_n^{(1)}$ は $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)} \dots$ で展開できるとする。 $\varphi_n^{(1)} = c_1 \varphi_1^{(0)} + c_2 \varphi_2^{(0)} + \dots$ 。 c_i の表式を求めよ。P200(10)
- (3) 2 次の摂動エネルギー $\varepsilon_n^{(2)}$ の表式を求めよ。P201(15)
- (4) P201 の[例題]を答えよ。

§ 7.2

- (5) 摂動論適用の例として、基底状態の水素原子の分極率を考える。一様な電場(強さ E, z 方向)の中に水素原子を置く。摂動 $\lambda H'$ を求めよ。P202(1)
- (6) 基底状態の水素原子の波動関数と固有値は(2)式、(3)式で与えられる。1 次の摂動エネルギー $\varepsilon_{1s}^{(1)}$ を求めよ。P202(4)
- (7) 次に、波動関数の 1 次の変化を求める。 $\cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0(\theta, \phi)$ とし、球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ の直交性等を用いて、 $\langle nlm | H' | 1s \rangle$ を表す。 r 積分を実行する前の式として表せ。P203(6)
- (8) 続きで、 $H = H_0 + EH'$ の量子数 $1s$ の波動関数 φ_{1s} を表せ。P204(9)
- (9) 分極率 α の定義を表す式を答えよ。P204(11)
- (10) $H = H_0 + EH'$ の波動関数 φ_{1s} について、 z の期待値を求める。これを $\varepsilon_{1s}^{(2)}$ を用いて表し、また分極率 α を用いて表せ。P206(13)(14)

§ 7.3

- (11) 1 次元調和振動子に摂動 $\lambda H' = \lambda x^4$ がある場合の 1 次の摂動エネルギーを求める。

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^* + a) \text{ として } \varepsilon_n^{(1)} \text{ を求めよ。P209(10)}$$

§ 7.4, § 7.5

- (12) 考えている定常状態が縮退している場合には、摂動論として、§ 7.1 の方法は(10)式や(15)式の分母が0になる時がありうるから、そのままは適用できない。そこでP211の行列のところにありのように、縮退した固有関数をユニタリー変換して、これを基底にとって H' の行列を対角化すればよい。縮退がある場合の摂動の例として、主量子数 n が 2 の状態にある水素原子に対する電場の影響によるシュタルク効果を考える。 $n = 2$ の状態としては $2s$ と 3 個($m = 1, 0, -1$)の $2p$ の合計 4 つがあるから、縮退は 4 重である。まず $H' = ez$ の行列を $\varphi_{2s}^{(0)}, \varphi_{2p1}^{(0)}, \varphi_{2p0}^{(0)}, \varphi_{2p-1}^{(0)}$ を基底として表せ。P212

(13) (12) の答えの行列を対角化し、新しい基底 (0 次近似の固有関数) を求めよ。

P212

(14) この電場によるエネルギー準位の変化 (シュタルク効果) を答えよ。P212.7-5 図

(15) $\bar{\varphi}_{\pm}^{(0)}$ の状態の場合の双極モーメント $-e\langle z \rangle_{\pm}$ を求めよ。P213

§ 7.6, § 7.7

(16) 基底状態の水素原子の分極率の問題を変分法で扱ってみる。 $H = H_0 + eEz$ であり、 H の波動関数に近いと思われる試験関数を φ とする。 φ は全く固定するのではなく、 φ を変化させる変数を γ に含む。

$\frac{\int \varphi^* H \varphi d\mathbf{q}}{\int \varphi^* \varphi d\mathbf{q}}$ の式を考える。

この問題では、試験関数は、 $\varphi = \varphi_0(1 + \gamma z)$, $\varphi_0 \propto e^{-\frac{r}{a_0}}$ で γ が φ を変化させる変数。この上の考えようとする式を γ を変数として最小を求めると、それが基底状態の変分法によるエネルギーの近似値である。まず $\langle \varphi | H | \varphi \rangle, \langle \varphi | \varphi \rangle$ を求める。

$$\iiint z^{2n+1} e^{-\frac{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{a_0}} dx dy dz = 0 \quad (z \text{ を奇数べきに含む積分は } z > 0 \text{ と } z < 0 \text{ で打ち消して}$$

0 になる) を考えて、 $\frac{\langle \varphi | H | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle}$ を表せ。P219

(17) $\langle \varphi_0 | H_0 | \varphi_0 \rangle$ を求めよ。P219

(18) $\langle \varphi_0 z | z | \varphi_0 \rangle = \langle \varphi_0 z | \varphi_0 z \rangle =$ を求めよ。P219

(19) $H_0 \varphi_0 z$ を求め、 $\langle \varphi_0 z | H_0 | \varphi_0 z \rangle$ を表せ。P219

(20) (19) の答えの第 2 項の積分を部分積分で求め、 $\langle \varphi_0 z | H_0 | \varphi_0 z \rangle$ を求めよ。P220

(21) $\frac{\langle \varphi | H | \varphi \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle}$ を表し、これを最小にする γ を求めよ。そして、変分法による基底状態のエネルギーの近似値を求めよ。また、第 2 項について正しい値と比較せよ。 $E \rightarrow 0$ で $\gamma \rightarrow 0$ とする。P220(3)

第 8 章

§ 8.1

- (1) 電子のスピン角運動量を $\mathbf{s}$ とすると、 $\mathbf{s}^2$ の固有値、 s_z の固有値はいくらか答えよ。また s はいくらか答えよ。P223
- (2) s_z について固有値が $\pm \frac{\hbar}{2}$ より、2 つの固有状態がある。それを α, β とすると (1) 式、(2) 式が得られる。 $s_{\pm} = s_x \pm is_y$ に対して、§ 4.2(10a) 式、(10b) 式に相当する式より、 $s_+ \alpha, s_+ \beta, s_- \alpha, s_- \beta$ を求めよ。P224(3a)(3b)
- (3) この α と β を基底にとって $\mathbf{s}^2, s_z, s_+, s_-, s_x, s_y$ を行列表示せよ。P224(4)(5)(6)
- (4) (3) の答えより、(7) 式を示せ。P225(7)

s_z の固有値 $+\frac{\hbar}{2}$ の α は上向きスピンの状態に対応し、 $-\frac{\hbar}{2}$ の β は下向きスピンの状態に対応する。 s_z の固有値を $m_s \hbar$ と書くと、 $m_s = \pm \frac{1}{2}$ であるが、これをスピン磁気量子数という。

§ 8.2

- (5) 電子が p 状態の軌道運動状態にある場合に、スピンを考慮する。そして $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) = l_x s_x + l_y s_y + l_z s_z$ の固有関数を求め、この $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ による準位の分裂を求める。 p 状態の軌道運動の状態は 3 重に縮退していて、その固有状態は $R(r)Y_1^1(\theta, \phi), R(r)Y_1^0(\theta, \phi), R(r)Y_1^{-1}(\theta, \phi)$ である。これらを u_1, u_0, u_{-1} と表すとする。それらについてスピンも考慮した固有関数を表せ。P229(6)
- (6) $l_x s_x + l_y s_y$ を l_+, s_+, l_-, s_- で表し、 $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ を求めよ。P229(7)
- (7) (5) の答えを基底にとり、 $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ を行列表示する。§ 4.2(10a) 式、(10b) 式と § 8.1(3a) 式、(3b) 式を用いて、行列表示せよ。P230(8)
- (8) (7) の答えでわかる通り、 $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ で結びつけられる状態は、固有値 $\hbar(m_l + m_s)$ の等しいものだけである。(8) 式から (9) 式に書き換えたとする。この $u_0 \alpha, u_1 \beta$ による部分行列を対角化するユニタリー変換の行列 T を求め、 $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ の固有関数と固有値を求めよ。同様に $u_{-1} \alpha, u_0 \beta$ による部分行列を対角化することを考え、 $(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})$ の固有関数と固有値を求めよ。P233(14)(15)(16)

§ 8.3

- (9) 電子のスピンによる磁気モーメント μ_s を角運動量 $\mathbf{s}$ を用いて表せ。また電子がもつ固有磁気モーメントの大きさ μ_s をボーア磁子 β_B を用いて表せ。P234(1), P235(5)

- (10) スピンとそれに伴う磁気モーメントをもった電子が、原子核（電荷 Ze ）とそれを囲む $Z-1$ 個の強く束縛された電子群（電荷 $(Z-1)\times(-e)$ ）のまわりを回っている場合を考える。原子核と $Z-1$ 個の電子を一緒にしたものを原子芯とよぶ。ここで、8-2図のように電子のまわりを正に帯電した原子芯が回っているとみなす。この原子芯の運動を円電流と見なし、電子の位置に磁場 $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ が生じているとする。この $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ は、電子の軌道運動の角運動量 $\mathbf{l}$ と同じ向きをもち、強さもそれに比例する。 $\mathbf{B}_{\text{eff}} \propto \mathbf{l}$ 。この $\mathbf{B}_{\text{eff}}$ によりエネルギーが生じる。このエネルギーはスピン軌道相互作用による摂動エネルギーとみなせる。この摂動 $H' = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}_{\text{eff}}$ を $\mathbf{l}, \mathbf{s}$ を用いて表せ。

P236(6)

§ 8.4

- (11) 1 電子の角運動量を合成したものは、 $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ と定義される。 $\mathbf{j}$ の成分の交換関係を答えよ。P237(2a)(2b)
- (12) j^2 と j_z の固有値を答えよ。また、 $j_{\pm} = j_x \pm ij_y$ に j_z の固有関数 $|m_j\rangle$ を作用させた式を答えよ。P237(i)(ii)(iii)
- (13) P237の(i)(ii)(iii)を、§ 8.2 で求めた 6 つの固有関数(15)式と(16)式について確かめる。6 つの固有関数が(i)を満たすことを示せ。P238(4a)(4b)
- (14) 続きで(ii)を満たすことを示せ。P238
- (15) $j_+ = l_+ + s_+, j_- = l_- + s_-$ として、(iii)を満たすことを示せ。P239

§ 8.5

- (16) 軌道角運動量をもつ電子を円電流とみなし、この磁気モーメントの大きさを求める。半径 a の円で、電荷 $-e$ の電子が電流と反対向きに速さ v で回っているとし、電流 I を求め、磁気モーメントの大きさ μ_l を求めよ。またこれを電子の角運動量の大きさ $|\mathbf{l}|$ を用いて表せ。P241,P242(1)
- (17) (16)の電子が真空の磁場内にあるとする。磁場の向きを z 方向にとり、磁束密度を $\mathbf{B}$ とする。この磁場と磁気モーメントとの相互作用のエネルギー H_z' を $\mathbf{l}$ と $\boldsymbol{\mu}$ の向きに注意して表せ。P242(2)
- (18) H_z' を含むハミルトニアン $H = H_0 + H_z'$ を厳密に出す。これは磁場内で運動する電荷 $-e$ の粒子のハミルトニアン $H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V$ ($\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル)から導かれる。この H を、磁場 $\mathbf{B}=(0,0,B)$ として求めよ。またこれを l_z を用いて表せ。P242(5),P243(6)
- (19) (18)の答えで B の2次の項は無視するとして、 $H = H_0 + H_z'$,

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r), H_z' = \frac{\beta_B}{\hbar}Bl_z$$

を考えることにする。この H の固有関数を考え、固有値方程式を求めよ。P243

このような、軌道運動している電子に磁場をかけてエネルギー準位が分裂するのを正常ゼーマン効果という。

§ 8.6

- (20) 回転する軌道運動を行う電子を含む系は、1つの小さなコマのようなものである。それが磁気モーメントをもつと考える。そしてそのコマのようなものが一様な磁場内におかれた場合には、8-7図のように偶力を受け歳差運動をする。電子の角運動量を $\mathbf{j}$ とすると、磁気モーメントは $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{j}$ である。磁気モーメントの運動 ($\mathbf{j}$ の運動) をハイゼンベルク方程式より求める。この場合のハミルトニアンを $H = -\gamma B j_z$ として、ハイゼンベルクの運動方程式を考えて、 $j_x(t), j_y(t), j_z(t)$ ごとに運動方程式を立てよ。P247
- (21) (5)式の期待値をとると(6)式になる。この $\langle j_x(t) \rangle, \langle j_y(t) \rangle, \langle j_z(t) \rangle$ の解を求めよ。また角振動数を求めよ。P245, P246

§ 8.7

- (22) 軌道角運動量をもつ電子に磁場が掛かるとした § 8.5 の問題に、電子のスピン磁気モーメントによる磁場中でのゼーマンエネルギーも考える。そして、スピン軌道相互作用の固有関数 § 8.2 の(15)式、(16)式からどういう $H = H_0 + \lambda H'$ の固有関数になるかを求める。また、1次の摂動エネルギーを求めて、エネルギーの変化を求める。摂動のハミルトニアンは、磁場中のスピンをもつ軌道運動する電子を考えるのであるから、スピン軌道相互作用、軌道運動による磁気モーメント (軌道角運動量に起因) と磁場のエネルギー、スピンによる磁気モーメント (スピン角運動量に起因) と磁場のエネルギーを加えて、 $H' = \zeta(\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}) + \frac{\beta_B B}{\hbar}(l_z + 2s_z)$ である。述べたように § 8.2 の(15)式、(16)式でこれを考える。まず § 8.2 の(15)式、(16)式の固有関数から、どういう固有関数になっていくかを考える。 $u_0\alpha, u_1\beta, u_0\beta, u_{-1}\alpha$ はゼーマンエネルギーの固有関数になっていることより、 $\varphi_{\pm\frac{1}{2}}, \varphi_{\pm\frac{3}{2}}, \chi_{\pm\frac{1}{2}}$ はどういう固有関数になるか答えよ。P250
- (22)の問題について、§ 8.2 の(15)式、(16)式の基底で H' を行列表示し、ユニタリー変換して対角行列にする。
- (23) (22)の答えより、1次の摂動エネルギーを求めよ。P254